Seminario del 29 Aprile 2014

Note Title 4/28/2014

"Un teorema di stabilità per varietà olomorficamente parallelizzabili"

Sia X una varietà complessa compatta, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

Def. X si dice olomorficamente parallelizzabile se il fibrato tangente olomorfo $T^{1,0}X$ è olomorficamente banale. Ciò è equivalente a dire che esistono $\{\zeta_1,..,\zeta_n\}$ campi globali olomorfi su X linearmente indipendenti in ogni punto $x\in X$. $\square$

Oss. X è olomorficamente parallelizzabile se e solo se esistono n 1-forme olomorfe globali $\{\varphi^1,..,\varphi^n\}$ linearmente indipendenti in ogni punto $x\in X$. $\square$

Esempio (1) $X = \mathbb{H}(3;\mathbb{C}) / \mathbb{H}(3,\mathbb{Z}[i])$ varietà di Iwasawa

$\varphi^1 = dz^1$, $\varphi^2 = dz^2$, $\varphi^3 = dz^3 - z^1 dz^2$, $\left(\zeta_1 = \frac{\partial}{\partial z^1}, \zeta_2 = \frac{\partial}{\partial z^2} + z^1\frac{\partial}{\partial z^3}, \zeta_3 = \frac{\partial}{\partial z^3}\right)$

(2) Toro complesso $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$. $\square$

Teorema 1 (Wang, PAMS '54) Sia X una varietà compatta olomorficamente parallelizzabile. Allora X è biolomorfa ad un quoziente G/D, dove G è un gruppo di Lie complesso connesso e semplicemente connesso e D è un sottogruppo discreto di G. $\square$

- Nakamura JDG '75 studia le varietà olomorficamente parallelizzabili quozienti di gruppi risolubili, e le loro piccole deformazioni, dimostrando che i numeri di Hodge non sono stabili.
- Rollenske JEMS 2011 studia le nilvarietà olomorficamente parallelizzabili e il loro spazio di Kuranishi.

Siamo interessati a generalizzare un Teorema di Andreotti, Grauert e Stoll, sulla stabilità di famiglie analitiche-complesse di tori complessi. Più precisamente,

Teorema (Angella, —) Sia $\{X_t\}_{t\in(-\varepsilon,1)}$ una famiglia analitico-complessa di varietà complesse compatte, con $\varepsilon>0$ sufficientemente piccolo.

Assumiamo che X_t sia olomorficamente parallelizzabile per ogni $t\in(0,1)$. Allora X_0 è olomorficamente parallelizzabile. $\square$

dim. Per ipotesi, $T^{1,0}X_t$ è olomorficamente banale per ogni $t\in(0,1)$. Equivalentemente $T^{1,0*}X_t$ è olomorficamente banale per ogni $t\in(0,1)$. Sia quindi $\{\varphi^1(t),..,\varphi^n(t)\}$ un co-riferimento globale olomorfo su X_t. Le $\varphi^J(t)$, $J=1,..,n$ dipendono in modo $\mathcal{C}^\infty$ da t. Fissiamo una famiglia liscia di metriche Hermitiane $\{g_t\}_{t\in(-\varepsilon,1)}$ su X_t, possiamo scegliere ogni co-riferimento unitario.

Per ogni $z_0\in X_0$ fissato, si consideri una carta locale olomorfa $\left(U\times(-\delta,\delta),(z^1,\dots,z^n,t)\right)$ centrata in $(z_0,0)$ su $\{X_t\}_{t\in(-\varepsilon,1)}$.

Localmente su $U\times(0,\delta)$, per $J=1,\dots,n$,

$$\varphi^J(z,t)\Big|_{U\times(0,\delta)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,t)\,dz^\alpha,\qquad (1)$$

dove $\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,t)$ sono funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in t e olomorfe in $(z^1,\dots,z^n)$.

Sia $(\,,\,)$ il prodotto L^2 indotto da g_t su X_t, i.e.,

$$\left(\psi^1(t),\psi^2(t)\right)=\int_{X_t}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}g_t^{\alpha\beta}\,\psi^1_\alpha(t,z)\,\overline{\psi^2_\beta(t,z)}\right)\sqrt{\det(g_{\alpha\beta}\,t)}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^{2n}$$

dove $\psi^i(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\psi^i_\alpha(t,z)\,dz^\alpha$, $i=1,2$.

• $\{\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,t)\}_{t\in(0,\frac{\delta}{2}]}$ è una famiglia di funzioni olomorfe uniformemente limitate sui compatti. Ciò segue da questi due fatti:

(i) Esiste una costante c tale che

$$\sum_{\alpha,\beta} g_t^{\alpha\beta}(z)u_\alpha\overline{u}_\beta \geq c\sum_{\gamma=1}^n |u_\gamma|^2,\quad \sqrt{\det(g_{\alpha\beta t}(z))}\geq c.$$

(ii) $$1=(\varphi^J(t),\varphi^J(t))=\int_{X_t}\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^n g_t^{\alpha\beta}\varphi^J_\alpha(z,t)\overline{\varphi^J_\beta(z,t)}\Big)\sqrt{\det(g_{\alpha\beta t})}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^{2n}$$

$$\geq c\int_K\sum_{\gamma=1}^n|\varphi^J_\gamma(z,t)|^2\sqrt{\det(g_{\alpha\beta t})}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^{2n}\geq c^2\int_K\sum_{\gamma=1}^n|\varphi^J_\gamma(z,t)|^2 dx^1\wedge\dots\wedge dx^{2n}$$

da cui:

$$c^{-2}\geq\int_K\varphi^J_\gamma(z,t)\overline{\varphi^J_\gamma(z,t)}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^{2n}$$

Quindi $\{\varphi^J_\alpha(z,t)\}_{t\in(0,\frac{\delta}{2}]}$ è una famiglia di funzioni olomorfe uniformemente limitate.

Dal Teorema di Vitali, per ogni $J,\alpha\in\{1,\dots,n\}$ esiste una funzione olomorfa $\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,0)$ su U, tale che $\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,t)\longrightarrow\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,0)$, $t\to 0$ uniformemente sui compatti, a patto di passare ad una sottosuccessione.

Poniamo $\varphi^J(0):=\sum_{\alpha=1}^n\varphi^J_\alpha(z^1,\dots,z^n,0)\,dz^\alpha$, $J=1,\dots,n$. Con una partizione dell'unità costruiamo $\{\varphi^1(0),\dots,\varphi^n(0)\}$ 1-forme olomorfe su X_0.

Si ha che $\{\varphi^1(0),\dots,\varphi^n(0)\}$ è un co-riferimento globale di 1-forme olomorfe su X_0 (Infatti $(\varphi^i(0),\varphi^J(0))=\delta^{iJ}$).

Ciò mostra che X_0 è olomorficamente parallelizzabile. $\square$

Vediamo come si recupera il Teorema di Andreotti-Grauert-Stoll

Corollario (Teorema di Andreotti-Grauert-Stoll, Ann. of Math. '59)
Sia $\{X_t\}_{t\in(-\varepsilon,1)}$ una famiglia analitica complessa di varietà complesse compatte, con $\varepsilon>0$ sufficientemente piccolo. Assumiamo che X_t sia un toro complesso per ogni $t\in(0,1)$. Allora X_0 è un toro complesso.

Dim. Se X_t è un toro complesso, allora $d\varphi^j(t)=0$, $j=1,\dots,n$.
Quindi, per le forme limite $\varphi^j(0)$, si ha $d\varphi^j(0)=0$, $j=1,\dots,n$.
(X_0 è olomorficamente parallelizzabile). Da Wang, Corollary 2, si ha:

$$2n=\dim G/G',$$

dove G' è il sottogruppo dei commutatori. Quindi:

$$G \text{ è abeliano e } X_0 \text{ è un toro complesso.} \quad \square$$

Diamo una dimostrazione diversa del Teorema di Andreotti-Grauert-Stoll.
Dim. Una varietà complessa compatta X olomorficamente parallelizzabile è un toro complesso se e solo se $b_1=2n$, dove $\dim_{\mathbb{C}} X=n$.
Infatti: $b_1=\dim_{\mathbb{R}} G/G'$. Pertanto:

$2n=b_1(X_t)=b_1(X_0)$, da cui X_0 è un toro complesso. $\square$