XX congresso dell'Unione Matematica Italiana
Siena, 07-12 settembre 2015

Problema di Chern-Yamabe

Daniele Angella   Simone Calamai   Cristiano Spotti

Centro di Ricerca Matematica "Ennio de Giorgi"

September 10, 2015

Metriche Hermitiane *speciali* su varietà complesse.

Metriche Hermitiane *speciali* su varietà complesse.

Speciali per:

- proprietà di curvatura
  (e.g., csc, Einstein, extremal, ...)
- proprietà coomologiche
  (e.g., Gauduchon, bilanciate *à la* Michelsohn, SKT, ...)
- una combinazione di entrambe.

Thm (Yamabe; Trudinger; Aubin; Schoen)

Ogni classe conforme di metriche Riemanniane su una varietà differenziabile compatta contiene una metrica a curvatura scalare costante.

Thm (Gauduchon)

Ogni classe conforme di metriche Hermitiane su una varietà complessa compatta contiene una metrica di Gauduchon (i.e., $\partial\overline{\partial}\omega^{n-1} = 0$, con n dimensione complessa).

X varietà complessa di $\dim_{\mathbb{C}} X = n$,
$\{\omega\}$ classe conforme di metriche Hermitiane.

X varietà complessa di $\dim_{\mathbb{C}} X = n$,
$\{\omega\}$ classe conforme di metriche Hermitiane.

Consideriamo la connessione di Chern:
l'unica connessione su $T^{1,0}X$ che preserva la struttura Hermitiana e la cui componente $(0,1)$ coincide con l'operatore di Cauchy-Riemann associato alla struttura olomorfa.

X varietà complessa di $\dim_{\mathbb{C}} X = n$,
$\{\omega\}$ classe conforme di metriche Hermitiane.

Consideriamo la connessione di Chern:
l'unica connessione su $T^{1,0}X$ che preserva la struttura Hermitiana e la cui componente $(0,1)$ coincide con l'operatore di Cauchy-Riemann associato alla struttura olomorfa.

La curvatura scalare di Chern è:

$$S^{Ch}(\omega) = \mathrm{tr}_{\omega} i\bar{\partial}\partial \lg \omega^n$$

Consideriamo l'azione

$$\mathcal{G}_X(\{\omega\}) := \mathcal{H}Conf(X; \{\omega\}) \times \mathbb{R}^+ \circlearrowleft \{\omega\}$$

dove $\mathcal{H}Conf(X; \{\omega\})$ denota lo spazio degli automorfismi biolomorfi che preservano la classe conforme, e $\mathbb{R}^+$ denota gli scaling.

Consideriamo l'azione

$$\mathcal{G}_X(\{\omega\}) \;:=\; \mathcal{H}\mathcal{C}onf(X;\{\omega\}) \times \mathbb{R}^+ \;\circlearrowleft\; \{\omega\}$$

dove $\mathcal{H}\mathcal{C}onf(X;\{\omega\})$ denota lo spazio degli automorfismi biolomorfi che preservano la classe conforme, e $\mathbb{R}^+$ denota gli scaling.

Consideriamo lo spazio dei moduli

$$\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X;\{\omega\}) \;:=\; \left\{\omega' \in \{\omega\} \;:\; S^{Ch}(\omega') \text{ costante}\right\} \Big/ \mathcal{G}_X(\{\omega\}) \;.$$

Problema di Chern-Yamabe

Sia X varietà complessa compatta con $\{\omega\}$ classe conforme di metriche Hermitiane. Vedere se

$$\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X;\{\omega\}) \neq \varnothing \, .$$

Problema di Chern-Yamabe

Sia X varietà complessa compatta con $\{\omega\}$ classe conforme di metriche Hermitiane. Vedere se

$$\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X; \{\omega\}) \neq \varnothing .$$

Per varietà non-Kähleriane, si tratta di un problema differente dal problema di Yamabe classico, e dal problema di Yamabe per varietà almost-Hermitiane studiato da del Rio e Simanca.

Sotto trasformazioni conformi, la curvatura scalare di Chern cambia come:

$$S^{Ch}(\exp(2u/n)\omega) = \exp(-2u/n)\left(S^{Ch}(\omega) + \Delta^{Ch}_{\omega} u\right),$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta^{Ch}_{\omega} u &:= (\omega | dd^c u)_{\omega} \\ &= \Delta_{d,\omega} u + (du|\vartheta)_{\omega} \end{aligned}$$

con ϑ forma di Lee associata a ω (i.e., $d\omega^{n-1} = \vartheta \wedge \omega^{n-1}$).

Problema di Chern-Yamabe, ix
PDE semilineare, ii

Sotto trasformazioni conformi, la curvatura scalare di Chern cambia come:

$$S^{Ch}(\exp(2u/n)\omega) \;=\; \exp(-2u/n)\left(S^{Ch}(\omega)+\Delta^{Ch}_{\omega}u\right),$$

dove

$$\begin{aligned}\Delta^{Ch}_{\omega}u \;&:=\; (\omega|dd^c u)_{\omega}\\ &=\; \Delta_{d,\omega}u+(du|\vartheta)_{\omega}\end{aligned}$$

con ϑ forma di Lee associata a ω (i.e., $d\omega^{n-1}=\vartheta\wedge\omega^{n-1}$).

- Se ω è Gauduchon, allora $\int_X \Delta^{Ch}_{\omega}u\,d\mu_{\omega}=0$.
- Se ω è bilanciata, allora $\vartheta=0$.

Scegliamo la normalizzazione:

$$\{\omega\}_1 \; := \; \left\{ \exp(2u/n)\eta \in \{\omega\} \; : \; \int_X \exp(2u/n)\, d\mu_\eta = 1 \right\} \; \subseteq \; \{\omega\} \; .$$

dove $\eta \in \{\omega\}$ è l'unica metrica di Gauduchon con $\int_X d\mu_\eta = 1$

Scegliamo la normalizzazione:

$$\{\omega\}_1 \ := \ \left\{ \exp(2u/n)\eta \in \{\omega\} \ : \ \int_X \exp(2u/n)\, d\mu_\eta = 1 \right\} \ \subseteq \ \{\omega\} \ .$$

dove $\eta \in \{\omega\}$ è l'unica metrica di Gauduchon con $\int_X d\mu_\eta = 1$

Il problema di Chern-Yamabe si riduce all'equazione

$$\Delta^{Ch}_\eta u + S^{Ch}(\eta) \ = \ \lambda \cdot \exp(2u/n)$$

dove λ è il grado di Gauduchon $\Gamma_X(\{\omega\})$ di $\{\omega\}$,

$$\lambda \ = \ \int_X S^{Ch}(\eta)\, d\mu_\eta \ = \ \frac{1}{(n-1)!} \int_X c_1^{BC}(K_X^{-1}) \wedge \eta^{n-1}$$

Problema di Chern-Yamabe, xii

caso curvatura non-positiva, i

Thm (—, S. Calamai, C. Spotti)

Sia X una varietà complessa compatta dotata di una classe conforme $\{\omega\}$ di metriche Hermitiane. Se $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$, allora $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X;\{\omega\}) = \{p\}$.

Problema di Chern-Yamabe, xiii

caso curvatura non-positiva, ii

Thm (—, S. Calamai, C. Spotti)

Sia X una varietà complessa compatta dotata di una classe conforme $\{\omega\}$ di metriche Hermitiane. Se $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$, allora $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X; \{\omega\}) = \{p\}$.

Cor

Sia X una varietà complessa compatta. Se $\mathrm{Kod}(X) \geq 0$, allora, per ogni classe conforme $\{\omega\}$ di metriche Hermitiane, si ha $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$

Thm (—, S. Calamai, C. Spotti)

Sia X una varietà complessa compatta dotata di una classe conforme $\{\omega\}$ di metriche Hermitiane. Se $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$, allora $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X; \{\omega\}) = \{p\}$.

Cor

Sia X una varietà complessa compatta. Se $\mathrm{Kod}(X) \geq 0$, allora, per ogni classe conforme $\{\omega\}$ di metriche Hermitiane, si ha $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$, quindi $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X; \{\omega\}) = \{p\}$.

Nel caso grado di Gauduchon positivo:

Problema di Chern-Yamabe, xvi
caso curvatura positiva, ii

Nel caso grado di Gauduchon positivo:

- ci sono esempi di metriche a curvatura scalare di Chern costante positiva
  (e.g., superficie di Hopf);

Nel caso grado di Gauduchon positivo:

- ci sono esempi di metriche a curvatura scalare di Chern costante positiva
(e.g., superficie di Hopf);
- un'applicazione del Teorema della Funzione Implicita dà soluzioni per S^{Ch} vicina a zero;

Nel caso grado di Gauduchon positivo:

- ci sono esempi di metriche a curvatura scalare di Chern costante positiva
  (e.g., superficie di Hopf);
- un'applicazione del Teorema della Funzione Implicita dà soluzioni per S^{Ch} vicina a zero;
- quando $\eta \in \{\omega\}$ è bilanciata (nel senso di Michelsohn), allora il problema di Chern-Yamabe è variazionale;

Nel caso grado di Gauduchon positivo:

- ci sono esempi di metriche a curvatura scalare di Chern costante positiva
  (e.g., superficie di Hopf);
- un'applicazione del Teorema della Funzione Implicita dà soluzioni per S^{Ch} vicina a zero;
- quando $\eta \in \{\omega\}$ è bilanciata (nel senso di Michelsohn), allora il problema di Chern-Yamabe è variazionale;
- fenomeni di biforcazione danno non unicità.

Sviluppi futuri:

Sviluppi futuri:

- studio dello spazio dei moduli $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X;\{\omega\})$ nel caso $\Gamma_X(\{\omega\}) > 0$;

Sviluppi futuri:

- studio dello spazio dei moduli $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X; \{\omega\})$ nel caso $\Gamma_X(\{\omega\}) > 0$;
- studio di metriche a curvatura scalare di Chern costante con condizioni coomologiche.