Scuola Estiva di Matematica 2024

Dipartimento di Scienza e Alta Tecnologia
Università dell'Insubria

22-25 luglio 2024

La Scuola Estiva di Matematica è rivolta a studenti del secondo e terzo anno dei corsi di studio in matematica o a coloro che hanno appena concluso il primo ciclo di studi. Verranno proposti 4 minicorsi di circa 4 ore ciascuno.

La registrazione è libera ma obbligatoria, il modulo per la registrazione è raggiungibile qui e sarà disponibile fino al **13 luglio**.

È possibile richiedere un alloggio a Como per il periodo della scuola, il costo verrà coperto dagli organizzatori, il numero dei posti disponibili è limitato. Le richieste dovranno pervenire entro il **1° giugno** tramite il modulo di registrazione.

La scuola si terrà presso il Dipartimento di Scienza e Alta Tecnologia dell'università dell'Insubria, a Como, in via Valleggio 11.

Per informazioni contattare gli organizzatori.

CORSI

Davide Bignamini

Il processo di Ornstein-Uhlenbeck

Claudio Cacciapuoti

Teoremi di unicità per l'equazione del calore

Marco Donatelli

Regolarizzazione di problemi inversi: metodi numerici e applicazioni

Marco Magliaro

La disuguaglianza isoperimetrica

ORGANIZZATORI

Claudio Cacciapuoti

claudio.cacciapuoti@uninsubria.it

Matteo Semplice

matteo.semplice@uninsubria.it

CORSI

- **Il processo di Ornstein-Uhlenbeck** - Davide Bignamini

In fisica, il moto Browniano è descritto come il movimento irregolare e continuo di particelle solide microscopiche sospese in un fluido. Deve il suo nome al botanico scozzese R. Brown (1773-1858), che lo osservò per la prima volta. Tuttavia, in matematica è conosciuto anche come processo di Wiener, in onore del matematico N. Wiener, che ne fornì una formalizzazione matematica come processo stocastico.
Possiamo affermare che il moto Browniano ha svolto un ruolo di primo piano nella nascita della probabilità moderna e della teoria dei processi stocastici. All'inizio del XX secolo, A. Einstein e P. Langevin si interessarono alla velocità delle particelle in un moto Browniano. Einstein e Langevin utilizzarono due approcci diversi per studiare la velocità di tali particelle. Einstein cercò di modellizzare il fenomeno attraverso un'equazione differenziale volta a descrivere l'evoluzione temporale della funzione di densità di probabilità della posizione di una particella. Langevin ebbe l'idea di descrivere la velocità di una particella attraverso il primo prototipo di un'equazione differenziale stocastica. Negli anni '30, il processo che, come scopriremo, risolve l'equazione di Langevin, fu studiato in dettaglio dai due fisici da cui prese il nome: L. Ornstein e G. E. Uhlenbeck.
Einstein e Langevin non avevano a disposizione la teoria matematica sviluppata anni dopo da K. Ito e A. N. Kolmogorov. Tuttavia, furono in grado di descrivere molte proprietà del moto Browniano, successivamente formalizzate da Wiener.
In questo minicorso, introdurremo la definizione matematica del moto Browniano, insieme alle relative proprietà, e studieremo la costruzione dell'integrale stocastico secondo Ito. Queste due nozioni costituiscono le fondamenta matematiche della teoria delle equazioni differenziali stocastiche, che, a sua volta, fornisce una struttura matematica per le idee di Langevin. La conclusione del corso sarà dedicata ad alcune osservazioni riguardanti il legame tra l'integrale stocastico di Ito e quello di Stratonovich, e, più in generale, con la teoria dei "rough paths".

- Baldi Paolo, Stochastic calculus. An introduction through theory and exercises. Universitext, Springer, 2017

- **Teoremi di unicità per l'equazione del calore** - Claudio Cacciapuoti

L'equazione del calore (o della diffusione) è una delle equazioni fondamentali della fisica matematica. Descrive sistemi caratterizzati dal fatto che una certa quantità diffonde da regioni ad alta densità verso regioni a bassa densità, con una legge di proporzionalità tra il flusso e il gradiente della densità. Per esempio, la temperatura all'interno di un conduttore termico o la concentrazione di particelle sospese in un fluido soddisfano l'equazione del calore. È naturale associare all'equazione un problema ai dati iniziali (problema di Cauchy): dato lo stato del sistema ad un certo tempo t_0 si vuole trovare lo stato del sistema a tutti i tempi successivi. Lo scopo di questo corso è di discutere alcuni risultati classici che garantiscono l'unicità della soluzione per un problema di questo tipo. Alcuni teoremi di unicità vengono presentati nei corsi introduttivi sulle equazioni alle derivate parziali. Il risultato più noto si basa sul principio del massimo e, se l'equazione è posta in tutto lo spazio, garantisce unicità della soluzione all'interno di una classe di funzioni che soddisfano un vincolo sull'andamento ad infinito. Tale condizione è non solo sufficiente ma anche necessaria, come risulta evidente da un noto contro-esempio dovuto ad A.N. Tikhonov (1906 - 1993).
Nel 1944, D.V. Widder (1898 - 1990) dimostra che l'unicità è garantita se la condizione di crescita ad infinito è sostituita dalla richiesta che la soluzione sia non-negativa (o limitata dal basso). Tale risultato risolve il problema dell'unicità in modo molto elegante, tenendo conto esclusivamente dell'interpretazione fisica dell'equazione.

- DiBenedetto Emmanuele, Gianazza Ugo, Partial differential equations. Birkhäuser/Springer, 2023.
- D.V. Widder, Positive temperatures on an infinite rod, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 85-95.

- **Regolarizzazione di problemi inversi: metodi numerici e applicazioni** - Marco Donatelli

Molte applicazioni in ambito ingegneristico e fisico richiedono l'approssimazione dell'origine di un fenomeno a partire da alcune misurazioni sperimentali. Tali problemi, noti come problemi inversi, sono solitamente mal posti e quindi necessitano di regolarizzazione [1]. Dopo aver definito un problema mal posto, si andranno a introdurre i concetti base della regolarizzazione nel caso di problemi lineari.
Le applicazioni considerate riguarderanno principalmente la ricostruzione di immagini affette da rumore ed eventualmente sfuocate [2]. Si mostreranno tecniche classiche basate su decomposizioni in frequenza mediante FFT e metodi numerici più recenti per modelli definiti mediante funzionali non lineari e operatori di regolarizzazione costruiti su grafi.

1. Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). Regularization of inverse problems (Vol. 375). Springer Science & Business Media.
2. Hansen, P. C., Nagy, J. G., & O'leary, D. P. (2006). Deblurring images: matrices, spectra, and filtering. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- **La disuguaglianza isoperimetrica** - Marco Magliaro

Fra tutte le curve piane chiuse e semplici di lunghezza fissata, quella che racchiude l'area massima è il cerchio. Questa proprietà, nota fin dall'antichità, è stata dimostrata rigorosamente per la prima volta solo nel XIX secolo. Da allora ne sono state formulate varie generalizzazioni e oggi ne esistono innumerevoli dimostrazioni che sfruttano tecniche diverse, spaziando dalle serie di Fourier alle equazioni alle derivate parziali, dal calcolo delle variazioni alla teoria geometrica della misura. Presenteremo alcune di queste dimostrazioni e discuteremo alcune delle generalizzazioni più significative di questo problema, che ha suscitato l'interesse di molti matematici sia per motivi puramente geometrici che per via delle sue numerose applicazioni.

1. Xavier Cabré, Isoperimetric, Sobolev, and eigenvalue inequalities via the Alexandroff-Bakelman-Pucci method: a survey, Chinese Ann. Math. Ser. B 38 (2017), no. 1, 201-214, doi:10.1007/s11401-016-1067-0.
2. Herbert Federer, Geometric measure theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. Band 153, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969.
3. Robert Osserman, The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), no. 6, 1182-1238.